**Pravděpodobnost**

Teorie pravděpodobnosti vychází ze studia náhodných pokusů.   
  
Náhodný pokus je proces, který při opakování dává ze stejných podmínek rozdílné výsledky.

Výsledek pokusu tedy není předem znám (výsledek není jednoznačně určen jeho podmínkami), je to však právě jeden z prvků známé množiny výsledků, kterou nazýváme **základní množina výsledků pokusu Ω**.

**Prvky základní množiny**

* možné výsledky náhodného pokusu se nazývají **elementární náhodné jevy** {*E*1, *E*2, ..., *En*};
* každá podmnožina základní množiny Ω se nazývá **náhodný jev** (značíme *A*, *B*, ...);
* prázdná podmnožina se nazývá **jev nemožný**, označujeme http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/emptyset.gif;
* základní množina je **jev jistý**, označujeme *I*.

**Řešené úlohy**

Klasickým příkladem náhodného pokusu je hod hrací kostkou.

**Řešení:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| * pokus |  | hod hrací kostkou |
| * elementární jevy |  | "padne 1" - *E*1;  "padne 2" - *E*2   "padne 6" - *E*6. |
|  |  |  |

Jevy *E*1, *E*2, ..., *E*6 vymezují základní množinu Ω.

V této základní množině mohou být například následující jevy:

náhodný jev *A* . . . "padne liché číslo" . . . *A* = *E*1 + *E*3 + *E*5  
náhodný jev *B* . . . "padne číslo ≥ 4" . . . *A* = *E*4 + *E*5 + *E*6  
jev nemožný . . . . ."padne číslo > 6"  
jev jistý . . . . . . . . . "padne číslo < 7"  
neslučitelné jevy. . ."padne sudé číslo", "padne liché číslo"

**Operace s jevy**

* **Součet jevů *A*, *B***   
  jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů *A*, *B*. Zavádíme označení *A*+*B* nebo množinově *A*http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/sjedn.gif*B*.
* **Součin jevů *A*, *B***  
  jev, který nastane právě tehdy, když nastanou oba jevy současně. Zavádíme označení *A.B* nebo množinově *A* ∩ *B*.
* **Rozdíl jevů *A*, *B***  
  jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev *A* a nenastane jev *B*. Zavádíme označení *A* - *B*.

* Jev *A* nazýváme **jevem opačným** k jevu *A*, je-li *A* = Ω - *A*.
* Náhodné jevy se nazývají **neslučitelné** (disjunktní), jestliže platí *A.B* = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/emptyset.gif.
* Jevy *A*1, *A*2, ..., *An* tvoří **systém neslučitelných jevů**, je-li *Ai.Aj* = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/emptyset.gif pro všechna *i* ≠ *j*.
* Tento systém se nazývá **úplný**, je-li *A*1 + *A*2 + ... + *An* = *I* = Ω.

**Axiomatické zavedení pravděpodobnosti**

Axiomatická výstavba teorie pravděpodobnosti, která pochází od významného ruského matematika A. N. Kolmogorova, vychází z toho, že pravděpodobnost je objektivní vlastnost náhodného jevu, která nezávisí na tom, zda ji umíme nebo neumíme měřit.

**Definice**   
**Jevové pole** *a* je množina všech různých podmnožin základní množiny Ω, která vyhovuje těmto podmínkám:

* jev jistý *I* leží v *a*
* Leží-li jevy *A*, *B* v *a*, pak *A*+*B*, *A.B* i *A*, *B* leží v *a*

**Poznámka**  
Na jevové pole *a* se můžeme dívat jako na množinu jevů, ve které každý výsledek definovaných operací náleží opět do této množiny.

**Definice**   
Nechť *a* je jevové pole. **Pravděpodobnost jevu *A*** je reálné číslo *P*(*A*), pro něž platí:

1. *P*(*A*) ≥ 0 . . . axiom nezápornosti
2. *P*(*I*) = 1 . . . axiom jednotky
3. *P*(*A*1 + *A*2 + ... + *An* + ...) = *P*(*A*1) + *P*(*A*2) + ...*P*(*An*) + ..., přičemž *A*1, *A*2, ..., *An*, ...http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/LEZI.GIF*a* tvoří skupinu navzájem neslučitelných jevů . . . axiom aditivity.

**Věta** o vlastnostech pravděpodobnosti

1. *P*(http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/emptyset.gif) = 0
2. *P*(*A*) = 1 - *P*(*A*)
3. *A* http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/PODMNOZ2.GIF*B* http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/cons.gif
   * 0 ≤ *P*(*A*) ≤ *P*(*B*)
   * *P*(*B - A*) = *P*(*B*) - *P*(*A*)
4. *P*(*A + B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*) - *P*(*A.B*)

**Důkaz:**

1. Jev nemožný http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIFa jev jistý *I* jsou neslučitelné jevy. Platí: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF + *I* = *I* a z axiomu aditivity plyne, že  
   *P*(*I*) = P(http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF + *I*) = *P*(http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF) + *P*(*I*) a odtud *P*(http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF) = *P*(*I*) - *P*(*I*) = 0
2. *A, A* jsou neslučitelné jevy. Zároveň platí *A* + *A* = *I*. Z axiomů jednotky a aditivity plyne:  
   *P*(*I*) = *P*(*A* + *A*) = 1, takže *P*(*A*) = 1 - *P*(*A*)
3. Nechť *A*http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/PODMNOZ.GIF*B*. Jelikož *A, A* jsou neslučitelné jevy, jsou neslučitelné také jevy *A.B, A.B*, neboť platí  
   (*A.B*)*.*(*A.B*) = (*B.A*)*.*(*A.B*) = *B*(*A.A*)*.B = B.http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF.B* = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/emptyset.gif.  
   Jev *B* můžeme zapsat ve tvaru *B = I.B* = (*A + A*)*.B* = *A.B + A.B = A + A.B*, neboť podle předpokladu *A*http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/PODMNOZ.GIF*B*. Tedy:  
   *P*(*B*) = *P*(*A + A.B*) = *P*(*A*) + *P*(*A.B*) ≥ *P*(*A*) ≥ 0.  
   Dosadíme-li do předchozí rovnosti *P*(*B*) = *P*(*A*) + *P*(*A.B*) rovnost *A.B* = *B - A*, vidíme, že platí *P*(*B - A*) = *P*(*B*) - *P*(*A*).
4. Platí, že:  
   *A = A.I = A.*(*B+B) = A.B+A.B*  
   *B = B.I = B.*(*A+A) = B.A+B.A*, tudíž  
   *A+B = A.B+A.B+A.B*  
   Jelikož jsou jevy *A.B*, *A.B*, *A.B* vzájemně neslučitelné, z axiomu aditivity vyplývá:  
   *P*(*A*) = *P*(*A.B+A.B*) = *P*(*A.B*) + *P*(*A.B*).  
   Vyjádříme-li nyní z předchozí rovnice *P*(*A.B*), obdržíme:  
   *P*(*A.B*) = *P*(*A*)-*P*(*A.B*), obdobně:  
   *P*(*B*) = *P*(*A.B+A.B*) = *P*(*A.B*) + *P*(*A.B*), tedy  
   *P*(*A.*B) = *P*(*B*)-*P*(*A.B*), tzn.  
   *P*(*A+B*) = *P*(*A.B+A.B+A.B*) = *P*(*A.B*) + *P*(*A.B*) + *P*(*A.B*) = *P*(*A.B*) + *P*(*A*) - *P*(*A.B*) + *P*(*B*) - *P*(*A.B*) =  
   = *P*(*A*) + *P*(*B*) - *P*(*A.B*).  
   Jsou-li jevy *A*, *B* neslučitelné, pak *A.B* = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/EMPTYSET.GIF a uvedený vztah odpovídá axiomu aditivity.

Klasická definice pravděpodobnosti

**Definice**   
Nechť je dáno *n* elementárních jevů *E*1, *E*2, ..., *En*, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů a jsou **stejně možné**. Rozkládá-li se jev *A* na *m* (*m* ≤ *n*) elementárních jevů z tohoto systému, pak pravděpodobnost jevu *A* je reálné číslo http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/vzor2_1.gif

**Poznámka**  
Klasická definice pravděpodobnosti se užívá, je-li:

* konečný počet elementárních jevů
* stejná míra výskytu elementárních jevů

Všechny elementární jevy se obvykle označují jako všechny možné případy. Všechny elementární jevy, na které se rozkládá jev A, se nazývají všechny příznivé případy. Pak daný vztah přejde na známý tvar:

http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/KLDEF.GIF

Řešené úlohy

**Příklad**

Rozhodněte, zda v následujících případech je stejná míra výskytu elementárních jevů:  
*a*) hod navrtanou kostkou  
*b*) hod mincí  
*c*) výstřel do terče

**Řešení:**      
ad *a*) *E*1 - padne 1, *E*2 - padne 2, ..., *E*6 - padne 6, není stejná míra výskytu  
ad *b*) *E*1 - padne rub, *E*2 - padne líc, je stejná míra výskytu  
ad *c*) *E*1 - zásah, *E*2 - mimo, u většiny střelců není stejná míra výskytu

**Příklad**    Při hodu kostkou určete pravděpodobnost jevů:  
*a*) jev *A*: "padne číslo 5"  
*b*) jev *B*: "padne číslo ≤ 2"

**Řešení:**      
ad *a*) http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/kldef1.gif  
ad *b*) http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/kldef2.gif

**Příklad** S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet  
*a*) šest  
*b*) menší než 7

**Řešení:**      
ad *a*) Šestka padne v následujících případech:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. kostka 2. kostka** | 1 5 | 5 1 | 2 4 | 4 2 | 3 3 |

Tzn. 5 možností, *m* = 5  
Počet všech možností: *n* = 6.6 = 36  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/kldef4.gif  
ad *b*)  
Z předchozího vyplývá, že je 5 možností pro součet šest. Ostatní možnosti:

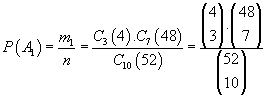
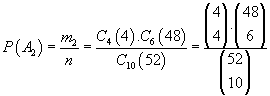
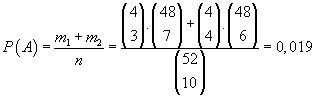
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **součet 5** | **součet 4** | **součet 3** | **součet 2** |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **1. kostka 2. kostka** | 1 4 | 4 1 | 2 3 | 3 2 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **1. kostka 2. kostka** | 1 3 | 3 1 | 2 2 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **1. kostka 2. kostka** | 1 2 | 2 1 | | |  |  | | --- | --- | | **1. kostka 2. kostka** | 1 1 | |

Takže *m* = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15  
  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/kldef3.gif

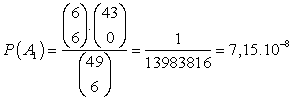
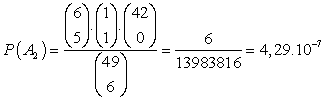
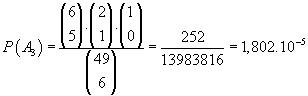
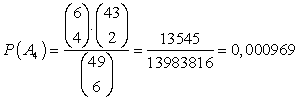
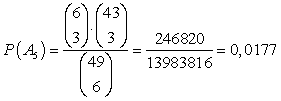
**Příklad**   V cele předběžného zadržení sedí vedle sebe 10 podezřelých, z toho 3 ženy. Jaká je pravděpodobnost, že všechny tři ženy sedí vedle sebe?

**Řešení:**    Počet možností, jak uspořádat 10 podezřelých, odpovídá počtu permutací z 10 prvků: *n* = 10!  
*m* = 8.3!.7! - existuje 8 způsobů umístění dané trojice žen (na pozicích 123, 234, 345, ..., 8910), 3! způsobů jak danou trojici uspořádat a 7! způsobů, jak uspořádat zbývající delikventy.  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/delik.gif

**Příklad** Stanovte pravděpodobnost jevu, že z 10 náhodně vytažených bridžových karet budou alespoň 3 esa. (bridžové karty: 52 karet celkem, z toho 4 esa)

**Řešení:**    Jev *A* - vybereme alespoň 3 esa, znamená, že vybereme 3 nebo 4 esa. To znamená, že jev *A* se rozkládá na součet dvou navzájem disjunktních jevů:  
*A*1 . . . vybereme 3 esa  
*A*2 . . . vybereme 4 esa  
*P*(*A*) = *P*(*A*1 + *A*2) = *P*(*A*1) + *P*(*A*2), kde:  
  
Hodnotu *n* (počet všech možných případů) jsme vypočetli pomocí kombinací bez opakování - z 52 karet vybíráme deset bez ohledu na pořadí, přičemž karty nevracíme zpět.  
Hodnotu *m*1 (počet všech příznivých případů) jsme vypočetli podobnou úvahou: ze čtyř es vybíráme tři bez ohledu na pořadí a ze zbývajících 48 karet vybíráme sedm, opět bez zřetele na uspořádání.  
Zcela analogicky vypočteme  
  
Takže:  


**Příklad** Při slosování sportky je z osudí postupně vylosováno 6 čísel ze 49. Po vylosování těchto čísel je ze zbývajících čtyřiceti tří čísel vylosováno dodatkové číslo. Při správném tipování:   
*a*) šesti čísel, získává sázející výhru 1. pořadí,   
*b*) pěti čísel a dodatkového čísla (5 + 1), získává sázející výhru 2. pořadí,   
*c*) pěti čísel, získává sázející výhru 3. pořadí,   
*d*) čtyř čísel, získává sázející výhru 4. pořadí,   
*e*) tří čísel, získává sázející výhru 5. pořadí.   
Vypočtěte pravděpodobnost, se kterou při vsazeném jednom sloupci vyhrajete v 1.tahu výhry *a* - *e*.

**Řešení:**    Řešit budeme obdobně, jako předchozí příklad 2.3.5.  
ad *a*)  
  
(řádově se jedná o stejnou pravděpodobnost, s jakou v ruletě padne pětkrát po sobě stejné číslo: (1/37)5 = 1,44.10-8)  
ad *b*)  
  
ad *c*)  
  
ad *d*)  
  
ad *e*)  


**Podmíněná pravděpodobnost a nezávislé jevy**

Pravděpodobnost uskutečnění jevu *A* za předpokladu, že nastal jev *B*, se zapisuje *P*(*A*/*B*) a nazývá se podmíněná pravděpodobnost. Je rovna:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/VZOR2_7.GIF

Řešené úlohy

**Příklad:** Házíme dvěma mincemi.   
Jev *A*: padne líc a rub  
Jev *B*: na první minci padne líc  
Určete pravděpodobnost jevu *A* za předpokladu, že nastal jev *B*.

**Řešení:**    Možnosti, které mohou nastat:

|  |  |
| --- | --- |
| RUB | RUB |
| RUB | LÍC |
| LÍC | RUB |
| LÍC | LÍC |

*a*) pomocí klasické definice: *P*(*A* / *B*) = 0,5  
*b*) pomocí vzorce na podmíněnou pravděpodobnost: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/PODPR1.GIF

**Příklad:** Máme krabici se třemi bílými a dvěma černými koulemi. Vytáhneme postupně dvě koule (první nevracíme zpět). Určete pravděpodobnost toho, že v druhém tahu vytáhneme bílou kouli za předpokladu, že v prvním tahu byla vytažena černá koule.

**Řešení:**     
jev *A*: ve druhém tahu vytažena bílá  
jev *B*: v prvním tahu vytažena černá  
Možnosti:

|  |
| --- |
|  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **1. tah** | **2. tah** | **celkem** |
| **počet možností** | černá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr3.gif | černá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr2.gif | 2 |
| černá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr3.gif | bílá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr4.gif | 6 |
| bílá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr4.gif | černá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr3.gif | 6 |
| bílá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr4.gif | bílá http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr3.gif | 6 |

|  |
| --- |
| Z tabulky vidíme, že:  *P*(*A.B*) = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr5.gif *P*(*B*) = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/podpr6.gif To znamená: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/VZOR2_7.GIF = 0,75 |

**Věta:**   
Pro pravděpodobnost součinu dvou jevů *A*, *B* platí:  
*P*(*A.B*) = *P*(*A*).*P*(*B* / *A*) = *P*(*B*).*P*(*A* / *B*)

**Důkaz:**    Tvrzení plyne přímo z definice

**Definice**   
Dva jevy *A*, *B* nazýváme **nezávislé**, jestliže platí: *P*(*A* / *B*)=*P*(*A*)

**Poznámky:**

* Jsou-li jevy *A*, *B* nezávislé, pak *P*(*A.B*) = *P*(*A*)*.P*(*B*).
* Pojem nezávislosti není totožný s pojmem neslučitelnosti.
* Jsou-li *A*, *B* neslučitelné jevy, pak *P*(*A*+*B*) = *P*(*A*)+*P*(*B*).
* U skupiny více než dvou jevů rozlišujeme nezávislost podvojnou a vzájemnou
* Jevy *A*1, ..., *An* jsou vzájemně nezávislé, jestliže pro každou jejich podmnožinu platí, že pravděpodobnost průniku jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.
* Jsou-li jevy vzájemně nezávislé, jsou také po dvou nezávislé. Opačné tvrzení neplatí!

Řešené úlohy

**Příklad:** Studenti při zkoušení mohou dostat tři otázky. První student je připraven pouze na první otázku, druhý umí pouze druhou otázku, třetí ovládá jen třetí otázku a čtvrtý je připraven na všechny tři otázky. Uvažujme nyní tyto jevy:  
*A*1 . . . vyvolaný student dokáže zodpovědět první otázku  
*A*2 . . . vyvolaný student dokáže zodpovědět druhou otázku  
*A*3 . . . vyvolaný student dokáže zodpovědět třetí otázku  
Ukažte, že jevy *A*1, *A*2, *A*3 jsou po dvou nezávislé, ale nejsou vzájemně nezávislé.

**Řešení:**    Z klasické definice pravděpodobnosti plyne, že:  
*P*(*A*1) = *P*(*A*2) = *P*(*A*3) = 2/4 = 0,5.  
Uvažujme nyní jevy: *A*1.*A*2, *A*1.*A*3, *A*2.*A*3, *A*1.*A*2.*A*3.  
Pro pravděpodobnosti těchto jevů opět z klasické definice pravděpodobnosti vyplývá:  
*P*(*A*1.*A*2) = *P*(*A*1.*A*3) = *P*(*A*2.*A*3) = *P*(*A*1.*A*2.*A*3) = 0,25.  
Pro jednotlivé dvojice jevů tedy platí:   
*P*(*Ai*.*Aj*) = *P*(*Ai*).*P*(*Aj*) = 0,5.0,5 = 0,25 (*i* ≠ *j*)  
Takže jevy *A*1, *A*2, *A*3 jsou po dvou nezávislé.  
Vzhledem k tomu, že *P*(*A*1.*A*2.*A*3) ≠ *P*(*A*1).*P*(*A*2).*P*(*A*3), neboť 0,25 ≠ 0,5.0,5.0,5, nejsou tyto tři jevy vzájemně nezávislé.

**Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta**

Řešené úlohy

**Příklad:** V obchodě jsou tři pokladny na nichž dojde k chybě v účtování s pravděpodobností: 0,1; 0,05 a 0,2, přičemž z hlediska umístění pokladen v obchodě jsou pravděpodobnosti odbavení pokladnami 0,3; 0,25 a 0,45. Jaká je pravděpodobnost, že osoba opouštějící obchod má chybný účet?

**Řešení:**      
jev *A*: došlo k chybě v účtování  
jev *Hi*: odbavení *i*-tou pokladnou  
jev *A* je možno vyjádřit:  
*A* = *A.H*1 + *A.H*2 + *A.H*3  
(zákazník má chybný účet, přičemž projde první pokladnou nebo má chybný účet po odbavení druhou pokladnou nebo má chybný účet a prošel třetí pokladnou)  
Jevy *A.H*1, *A.H*2, *A.H*3 jsou vzájemně neslučitelné, proto:  
*P*(*A*) = *P*(*A.H*1 + *A.H*2 + *A.H*3) = *P*(*A.H*1) + *P*(*A.H*2) + *P*(*A.H*3) = (z věty 2.6.1.)  
         = *P*(*H*1).*P*(*A*/*H*1) + *P*(*H*2).*P*(*A*/*H*2) + *P*(*H*3).*P*(*A*/*H*3) =  
         = 0,3.0,1 + 0,25.0,05 + 0,45.0,2 = 0,1325

Zobecněním postupu z předchozí úlohy řešíme úlohy formulované na základě **výchozí situace**:

* Máme určit pravděpodobnost jevu *A*, o kterém je známo, že může nastat pouze současně s některým z jevů *H*1, *H*2, ..., *Hn*, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů:

**Věta** (o úplné pravděpodobnosti)  
Nechť je dán úplný systém vzájemně neslučitelných jevů *H*1, *H*2, ..., *Hn* a libovolný jev *A*, který může nastat pouze současně s některým z jevů *Hi*. Pro pravděpodobnost jevu *A* platí:  
*P*(*A*) = *P*(*H*1).*P*(*A*/*H*1)+*P*(*H*2).*P*(*A*/*H*2)+...+*P*(*Hn*).*P*(*A*/*Hn*) = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/vzor3_1.gif

Řešené úlohy

**Příklad:** Zadání je stejné jako v předchozím příkladu. Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že jsme byli u druhé pokladny, máme-li chybný účet?

**Řešení:** Hledáme tedy, čemu je rovno *P*(*H*2 / *A*). Lehce odvodíme:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/UPPR1.GIF

Tato situace se dá opět shrnout:

**Věta** - Bayesova věta:  
Nechť je dán úplný systém vzájemně neslučitelných jevů *H*1, *H*2, ..., *Hn* a libovolný jev *A*, který může nastat jen současně s některým z jevů *Hi*. Pak pravděpodobnost, že nastane jev *Hi*, za předpokladu, že nastal jev *A* je:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/vzor3_2.gif, kde http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/vzor3_3.gif

**Důkaz:** Opět zjevné, viz. předchozí příklad 2.7.2.

**Opakované pokusy**

Stává se, že náhodný pokus, jehož výsledkem je jev *A*, opakujeme *n*-krát po sobě při zachování stejného systému podmínek. Pokud pravděpodobnost jevu *A* při každém opakování nezávisí na výsledcích předcházejících pokusů, hovoříme o **Bernoulliho posloupnosti nezávislých pokusů** (např. hod kostkou). **Závislými** pak nazveme takové opakované pokusy, při nichž je pravděpodobnost "nastoupení" jevu *A* v určitém pokusu závislá na výsledcích předchozích pokusů (např. výběry z osudí bez vracení).

Nezávislé pokusy

Řešené úlohy

**Příklad:** Házíme šestkrát kostkou. Vypočtěte pravděpodobnost, že z těchto šesti hodů padne šestka právě dvakrát.

**Řešení:** Jedna z možností, které mohou nastat je, že šestka padne na první a druhé kostce, přičemž na zbývajících kostkách padne jakékoliv číslo vyjma šestky: 66XXXX. Pravděpodobnost, že tato situace nastane, se vypočte jakou součin pravděpodobností, s jakou padnou čísla na jednotlivých kostkách:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/OPPOK7.GIF  
Další možnosti, kdy padnou dvě šestky, jsou stejně pravděpodobné jako první možnost. Jedná se o případy:

|  |  |
| --- | --- |
| 66XXXX 6X6XXX  . . .  XXX6X6 XXXX66 | ... počet všech těchto možností lze vypočíst např. pomocí permutací s opakováním: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/OPPOK8.GIF |

Hledaná pravděpodobnost je tedy dána vztahem:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/OPPOK9.GIF

Pokud naše úvahy z předchozího příkladu shrneme, obdržíme:

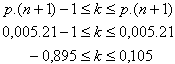
**Věta:**   
Je-li pravděpodobnost jevu *A* v každém pokusu *P*(*A*) = *p*, pak pravděpodobnost jevu *Ak*, že se jev *A* v Bernoulliho posloupnosti *n* nezávislých pokusů uskuteční právě *k*-krát, je určena vztahem:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/vzor3_4.gif

**Důkaz:**Vyjdeme z řešení příkladu 2.8.1.. Výraz *pk* vyjadřuje pravděpodobnost, že jev *A* nastal právě v *k* pokusech. Výraz (1 - *p*)*n - k* vyjadřuje pravděpodobnost, že jev *A* nenastal právě v *n - k* pokusech. V celé posloupnosti *n* pokusů může jev *A* nastat celkem http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/OPPOK10.GIFzpůsoby. Proto je hledaná pravděpodobnost:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/VZOR3_4.GIF

**Poznámka:**  
Ve vzorci z předchozí věty bychom pro různé hodnoty parametru *k* dostávali různé výsledky. Někdy je účelné najít způsob, kterým zjistíme, které *k* má největší pravděpodobnost. K tomu užíváme vztahu:  
*p*.(*n* + 1) - 1 ≤ *k* ≤ *p*.(*n* + 1)

Řešené úlohy

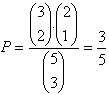
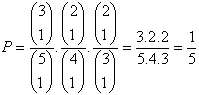
**Příklad:** Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude znát učivo, je 0,005. Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvaceti vybranými studenty bude:  
*a*) právě 5 znalých studentů,  
*b*) nejvýše 2 znalí studenti,  
*c*) alespoň jeden znalý student,  
*d*) jaký je nejpravděpodobnější počet znalých studentů.

**Řešení:**      
ad *a*) http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/oppok2.gif  
ad *b*) http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/oppok4.gif  
ad *c*) http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/oppok5.gif  
ad *d*)   
Takže nejpravděpodobnější počet znalých studentů je *k* = 0

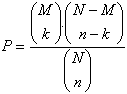
Závislé pokusy

Řešené úlohy

**Příklad:** V osudí jsou 2 bílé a 3 černé koule. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že:   
*a*) vytáhneme 3 koule a budou 2 černé a 1 bílá  
*b*) vytáhneme bez vracení jako první černou kouli, pak bílou a nakonec černou.

**Řešení:**     
ad *a*)   
ad *b*) ČBČ . . .   
(další možná pořadí: ČČB, BČČ - obě se stejnou pravděpodobností jako ČBČ, všechny dohromady tedy dávají případ ad *a*)

Situaci z předchozího příkladu opět shrneme ve větě:

**Věta:**  
Nechť je dán soubor *N* prvků, z nichž *M* má určitou vlastnost a (*N* - *M*) nikoliv. Vybereme postupně *n* prvků, z nichž **žádný nevracíme**. Pravděpodobnost, že mezi *n* vybranými bude *k* takových, že mají sledovanou vlastnost, vypočteme podle vzorce:  


**Důkaz:**    Zřejmé - odvozeno z klasické definice pravděpodobnosti

Řešené úlohy

**Příklad:** Mezi 15 výrobky je 5 zmetků. Vybereme 3 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že jeden z nich je vadný, jestliže:  
*a*) vybereme všechny 3 najednou  
*b*) vybíráme po jednom bez vracení

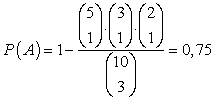
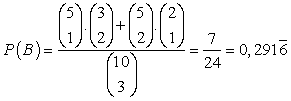
**Řešení:**     
ad *a*)  = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/zpok5.gif  
ad *b*) Možnosti: (V-vadný, D-dobrý)

|  |
| --- |
| VDD . . . http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/zpok2.gif DVD . . . http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/zpok3.gif DDV . . . http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/zpok4.gif To jsou všechny možné způsoby výběru: *P* = *P*1 + *P*2 + *P*3 = http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/zpok5.gif |

**Poznámka:**  
Nezáleží tedy na tom, vybereme-li výrobky najednou nebo postupně bez vracení.

Řešené úlohy

**Příklad:** Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:  
*a*) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu  
*b*) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

**Řešení:**      
ad *a*)  
Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k "alespoň dvě mají stejnou hodnotu" je "každá má jinou hodnotu":  
  
ad *b*)  
Dohromady za 700 Kč, tzn. jedna za 100 Kč a dvě za 300 Kč nebo dvě za 100 Kč a jedna za 500 Kč:  


**Příklad:** Z celkové produkce závodu jsou 4 % zmetků a z dobrých je 75 % standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

**Řešení:**      
jev *A*...vybraný výrobek není zmetek  
jev *B* ...vybraný výrobek je standardní  
Víme, že: *P*(*A*) = 1 - 0,04 = 0,96; *P*(*B*/*A*) = 0,75  
Hledaná pravděpodobnost:  
*P*(*A.B*) = *P*(*A*).*P*(*B*/*A*) = 0,96.0,75 = 0,72

**Příklad:** Z výrobků určitého druhu dosahuje 95 % předepsanou kvalitu. V určitém závodě, který vyrábí 80 % celkové produkce, však předepsanou kvalitu má 98 % výrobků. Mějme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben ve výše uvedeném závodě?

**Řešení:**      
jev *A*...výrobek je vyroben ve zmiňovaném závodě  
jev *B*...výrobek je předepsané kvality  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr8.gif

**Příklad:** Menza zakoupila 12 chladniček z 1. závodu, 20 z 2. závodu a 18 z 3. závodu. Pravděpodobnost, že chladnička je výborné jakosti, pochází-li z 1. závodu je 0,9, z 2. závodu 0,6 a z 3. závodu 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti?

**Řešení:**     
jev *A*...náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti  
jev *Bi*... náhodně vybraná chladnička pochází z *i*-tého závodu  
Chladniček je dohromady 50.  
*A* = (*A.B*1) + (*A.B*2) + (*A.B*3)  
*P*(*A*) = *P*(*A.B*1) + *P*(*A.B*2) + *P*(*A.B*3)  
*P*(*A*) = *P*(*B*1).*P*(*A*/*B*1) + *P*(*B*2).*P*(*A*/*B*2) + *P*(*B*3).*P*(*A*/*B*3)  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr9_3.gif

**Příklad:** Ve společnosti je 45 % mužů a 55 % žen. Vysokých nad 190 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

**Řešení:**      
jev *A*...vybraný člověk je vyšší než 190 cm  
jev *B*1...vybraný člověk je muž  
jev *B*2...vybraný člověk je žena  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr10_1.gif  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr10_2.gif

**Příklad:** Sada, kterou tvoří 100 součástek, je podrobena výběrové kontrole. Sada se nepřijme, jestliže mezi pěti kontrolovanými součástkami je alespoň jedna vadná. Jaká je pravděpodobnost toho, že se sada nepřijme, jestliže obsahuje 5% vadných součástek?

**Řešení:** Budeme řešit pomocí opačného jevu. Ten spočívá v tom, že sada bude přijata. Tento jev je průnikem pěti jevů:  
*A* = *A*1.*A*2.*A*3.*A*4.*A*5, kde *Ak* znamená, že *k*-tá kontrolovaná součástka je kvalitní.  
Pravděpodobnost jevu *A*1: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr11_1.gif(100 součástek z nichž je 95 kvalitních)  
Když nastane jev *A*1, zůstane 99 součástek, mezi nimiž je 94 kvalitních, takže: http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr11_2.gif  
Pravděpodobnost zbývajících jevů odvodíme obdobným způsobem, tzn.  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr11_3.gif  
*P*(*A*) = 1 - http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/Images/pr11_4.gif= 1 - 0,77 = 0,23

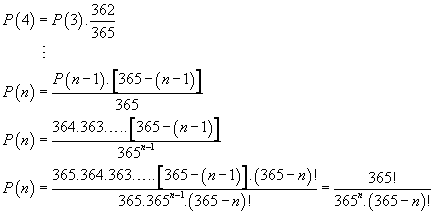
**Příklad:** Dva střelci vystřelí po jedné ráně. Pravděpodobnosti zásahu cíle jsou po řadě 0,5 a 0,9. Určete pravděpodobnost toho, že alespoň jeden střelec zasáhne cíl.

**Řešení:**      
jev *A*: alespoň jeden zasáhne cíl  
jev *B*: cíl zasáhne první střelec  
jev *C*: cíl zasáhne druhý střelec  
*P*(*A*) = *P*(*B*.*C* + *B*.*C* + *B*.*C*) = *P*(*B*.*C*) + *P*(*B*.*C*) + *P*(*B*.*C*) = *P*(*B*).*P*(*C*) + *P*(*B*).*P*(*C*) + *P*(*B*).*P*(*C*)  
       = 0,5.0,1 + 0,5.0,9 + 0,5.0,9 = 0,95  
nebo:  
*P*(*A*) = 1 - *P*(*B*.*C*) = 1 - *P*(*B*).*P*(*C*) = 1 - 0,5.0,1 = 0,95

**Příklad:** Vypočtěte, co je pravděpodobnější? Vyhrát v tenise se stejně silným soupeřem 3 zápasy ze 4 nebo 6 zápasů z osmi?

**Řešení:**Tenisové zápasy jsou vlastně opakované nezávislé pokusy. Hrajeme-li se stejně silným soupeřem je pravděpodobnost výhry v každém zápase *p* = 0,5, takže:  
Pravděpodobnost, že vyhrajeme 3 zápasy ze 4:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/tenis1.gif  
Pravděpodobnost, že vyhrajeme 6 zápasů z 8:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/tenis2.gif  
Pravděpodobnější je tedy zvítězit ve třech zápasech ze čtyř.

**Příklad:** Narozeninový problém I. Spočítejte pravděpodobnost, že žádní dva lidé z patnáctičlenné skupiny nemají narozeniny ve stejný den roku. Ignorujte 29.únor.

**Řešení:** Označme *P*(*n*)...pravděpodobnost, že dva lidé z *n*-členné skupiny nemají narozeniny ve stejný den.  
*n* = 2  
První člověk má narozeniny libovolný den v roce. Pravděpodobnost, že druhý člověk nemá narozeniny tentýž den, je:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/np1.gif  
*n* = 3  
Navážeme-li na předchozí úvahu, pak:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/np2.gif  
Obdobně tedy:  
  
Takže jsme odvodili obecný vzorec, nyní pro *n* = 15:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/np4.gif

**Příklad:** Narozeninový problém II. *(Richard von Mises, 1939)*  
Kolik lidí se musí nacházet v místnosti, aby, ignorujíce 29.únor, dva z nich měli narozeniny ve stejný den roku s pravděpodobností alespoň 50%.

**Řešení:**    Označme *P*(*n*)...pravděpodobnost, že dva lidé z *n*-členné skupiny mají narozeniny ve stejný den. Využijeme řešení předchozího příkladu. Stačí si uvědomit, že:  
*P*(*n*) = 1 - *P*(*n*), tedy:  
http://homen.vsb.cz/%7Eoti73/cdpast1/KAP02/IMAGES/np5.gif  
Lehce zjistíme, že *P*(*n*) > 0,5 poprvé pro *n* = 23 (*P*(23) = 0,507)  
V místnosti se tedy musí nacházet alespoň 23 lidí.